A construction of weakly reflective submanifolds in compact symmetric spaces (Differential Geometry of Submanifolds)

大野, 晋司

数理解析研究所講究録
第2017巻 2017年 33-58

A construction of weakly reflective submanifolds in compact symmetric spaces

大野　晋司
(大阪市立大学数学研究所, 首都大学東京)
Shinji Ohno
(Osaka City University Advanced Mathematical Institute,
Tokyo Metropolitan University)

概要

本講演では, 既約制限ルート系の拡張である対称三対の概念を用いて, 可換な Hermann 作用の軌道が弱鏡映部分多様体になるための十分条件を与える. この十分条件を用いて, コンパクト対称空間内の弱鏡映部分多様体の新しい例を与える.

1 Introduction

弱鏡映部分多様体とは, [6] において井川, 酒井, 田崎が導入した鏡映部分多様体の一つの一般化である. [6] において, 井川, 酒井, 田崎は超球面内の austere 部分多様体が弱鏡映性という大域的な対称性を持つことに着目し, 既約対称空間の線型イソトロピー表現の austere 軌道と弱鏡映軌道を分類した. 彼らは既約対称空間の線型イソトロピー表現の軌道が austere 性 (更には弱鏡映性) を持つための必要十分条件を制限ルート系を用いて与えている. 我々は, この事実を超球面を含むコンパクト対称空間に一般化したい. そのために, まずはコンパクト型既約対称空間のイソトロピー

作用の軌道を調べるのが順当であろう．しかしながら，コンパクト型既約対称空間のイソトロピー作用の austere 軌道は鏡映部分多様体となることが知られている．すなわち，コンパクト型既約対称空間のイソトロピー作用からは自明な弱鏡映部分多様体しか得られない．よって我々はコンパクト型既約対称空間のイソトロピー作用の一般化である Hermann 作用の軌道を考える．

井川は [4] において，可換な Hermann 作用の軌道の幾何学的性質を調べるために既約ルート系の拡張概念である重複度付き対称三対の概念を導入した．井川は可換な Hermann 作用の軌道全体のなす空間 (軌道空間) を対称三対を用いて表し，さらに，軌道が極小性，austere 性，全測地性を持つための必要十分条件を重複度付き対称三対の言葉で与えた．また，austere 性を持つ軌道の分類は与えられているが，弱鏡映性を持つ軌道の分類は与えられていない．本講演では，可換な Hermann 作用の軌道が弱鏡映性を持つための十分条件を対称三対の言葉で与え，コンパクト対称空間内の弱鏡映部分多様体の新しい例を構成する．

G をコンパクト，連結，半単純 Lie 群とし，K_1, K_2 を G の対称部分群とする．すなわち，各 $i = 1,2$ について G の対合的自己同型 θ_i が存在し，$(G_{\theta_i})_0 \subset K_i \subset G_{\theta_i}$ を満たすとする．ただし G_{θ_i} は θ_i の固定点集合のなす G の部分群で，$(G_{\theta_i})_0$ はその単位元を含む連結成分である．我々は次の 3 つの Lie 群作用を考える．

1. $(K_2 \times K_1) \curvearrowright G \ : (k_2, k_1) \cdot g = k_2 g k_1^{-1} \quad ((k_2, k_1) \in K_2 \times K_1)$,
2. $K_2 \curvearrowright G/K_1 \ : k_2 \cdot \pi_1(g) = \pi_1(k_2 g) \quad (k_2 \in K_2)$,
3. $K_1 \curvearrowright K_2\backslash G \ : k_1 \cdot \pi_2(g) = \pi_2(g k_1^{-1}) \quad (k_1 \in K_1)$.

K_2 作用と K_1 作用を Hermann 作用と呼ぶ．$(K_2 \times K_1)$ 作用の軌道は Hermann 作用の軌道とよく似た性質を持つ．特に，井川の方法を用いると，$(K_2 \times K_1)$ 作用の極小軌道，austere 軌道は，重複度付き対称三対の言葉で決定できる．

2 弱鏡映部分多様体

まずは弱鏡映部分多様体と鏡映部分多様体の定義を述べる．$(\tilde{M}, \langle , \rangle)$ を完備 Riemannian 多様体とする．

定義 1 M を $\tilde{M}$ の部分多様体とする．このとき M が $\tilde{M}$ の鏡映部分多様体であるとは，$\tilde{M}$ の対合的等長変換 σ_M が存在して，M が σ_M の固定点集合の単位連結成分となる時にいう．このとき，σ_M を M の鏡映という．

定義 2 M を $\tilde{M}$ の部分多様体とする．各点 $x \in M$ の各法ベクトル $\xi \in T_x^{\perp}M$ に対して，ある $\tilde{M}$ の等長変換 σ_ξ が存在して，$\sigma_\xi(x) = x$, $\sigma_\xi(M) = M$, $(d\sigma_\xi)_x(\xi) = -\xi$ を満たすとき，M を $\tilde{M}$ の弱鏡映部分多様体と呼ぶ．このとき σ_ξ を M の ξ に沿った弱鏡映と呼ぶ．

もし M が $\tilde{M}$ の鏡映部分多様体であれば,σ_M は M の各点 $x \in M$ における各法ベクトル $\xi \in T_x^{\perp}M$ に沿った弱鏡映となる．したがって，$\tilde{M}$ の鏡映部分多様体は $\tilde{M}$ の弱鏡映部分多様体である．鏡映部分多様体は全測地的であるが，弱鏡映部分多様体は全測地的とは限らない点に注意しておく．

定義 3 ([3]) M を $\tilde{M}$ の部分多様体とする．M の形作用素を A で表す．M が $\tilde{M}$ の austere 部分多様体であるとは，M の各点 $x \in M$ の各法ベクトル $\xi \in T_x^{\perp}M$ に対して，形作用素 A^{ξ} の固有値の集合が，重複度込みで -1 倍で不変になるときにいう．

austere 部分多様体は極小部分多様体であることはすぐに分かる．井川，酒井，田崎は，弱鏡映部分多様体が austere 部分多様体であることを示している．幾つかの部分多様体としての性質は次のような関係を持っている．

$$\begin{array}{ccccc}
\text{鏡映} & \Rightarrow & \text{弱鏡映} & \Rightarrow & \text{arid} \\
\Downarrow & & \Downarrow & & \Downarrow \\
\text{全測地的} & \Rightarrow & \text{austere} & \Rightarrow & \text{極小}.
\end{array}$$

定義 4 M を $\tilde{M}$ の部分多様体とする．各点 $x \in M$ の 0 でない各法ベクトル $\xi \in T_x^{\perp}M$ に対して，ある $\tilde{M}$ の等長変換 σ_ξ が存在して，$\sigma_\xi(x) = x$, $\sigma_\xi(M) = M$, $(d\sigma_\xi)_x(\xi) = -\xi$ を満たすとき，M を $\tilde{M}$ の *arid* 部分多様体と呼ぶ．

弱鏡映部分多様体は次のような性質を持つことが知られている．

補題 1 ([6]) *G を Riemann 多様体 $\tilde{M}$ に等長的に作用する Lie 群とする．各 $x \in \tilde{M}$ について，軌道 Gx を考える．各 $\xi \in T_x^{\perp}Gx$ について，Gx の x における ξ に沿った弱鏡映が存在すれば，Gx は $\tilde{M}$ の弱鏡映部分多様体である．*

命題 1 ([6]) *Riemann 多様体への余等質性 1 の Lie 群作用の特異軌道は弱鏡映部分多様体である．*

命題 2 ([6]) *G を完備連結 Riemann 多様体 $\tilde{M}$ へ等長的に作用する連結 Lie 群とする．G の $\tilde{M}$ への作用が余等質性 1 で二つの特異軌道を持つと仮定する．もし，主軌道で $\tilde{M}$ の弱鏡映部分多様体となる軌道が存在すれば，その軌道は二つの特異軌道と同じ距離を持ち，二つの特異軌道は等長的である．*

3 極小軌道と austere 軌道

この節では，Hermann 作用と $K_2 \times K_1$ の G への作用を考える．これらの作用は超極作用であることが知られている．コンパクト Lie 群の Riemann 多様体 M への作用が超極であるとは，M の連結平坦閉部分多様体 S が存在して，S が全ての軌道と直交するときにいう．この S を切断という．A. Kollross は [7] に於いてコンパクト既約対称空間への超極作用を分類した．この分類から余等質性が 2 以上のコンパクト既約対称空間への超極作用は Hermann 作用と軌道同値であることがわかる．

G をコンパクト連結半単純 Lie 群とし，K_1, K_2 を G の閉部分群とする．各 $i = 1, 2$ について，G の対合的自己同型 θ_i が存在して，$(G_{\theta_i})_0 \subset K_i \subset G_{\theta_i}$

を満たすとする．ただし G_{θ_i} は θ_i の固定点全体のなす群で，$(G_{\theta_i})_0$ はその単位元を含む連結成分である．このとき，三対 (G, K_1, K_2) をコンパクト対称三対と呼ぶ．対 (G, K_i) は $i = 1, 2$ についてコンパクト対称対である．G, K_1, K_2 の Lie 環を $\mathfrak{g}, \mathfrak{k}_1$, $\mathfrak{k}_2$ で表す．θ_i から誘導される $\mathfrak{g}$ の対合的自己同型も同じ記号 θ_i で表す．$\mathfrak{g}$ 上の $\mathrm{Ad}(G)$ 不変内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ を一つ取り固定する．このとき，内積 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ は G 上の両側不変計量と $M_1 := G/K_1$ and $M_2 := K_2\backslash G$ 上の G 不変計量を誘導する．これらの G, M_1, M_2 上の計量も同じ記号 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ で表す．計量 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ に関して，G, M_1, M_2 はコンパクト Riemann 対称空間の構造を持つ．$i = 1, 2$ について π_i で G から M_i への自然な射影を表す．次の 3 つの群作用を考える．$g \in G$ に対して，

- $(K_2 \times K_1) \curvearrowright G \ : (k_2, k_1) \cdot g = k_2 g k_1^{-1} \quad ((k_2, k_1) \in K_2 \times K_1)$,
- $K_2 \curvearrowright M_1 \ : k_2 \cdot \pi_1(g) = \pi_1(k_2 g) \quad (k_2 \in K_2)$,
- $K_1 \curvearrowright M_2 \ : k_1 \cdot \pi_2(g) = \pi_2(g k_1^{-1}) \quad (k_1 \in K_1)$.

この 3 つの作用は同じ軌道空間を持つ．実際，次の図式が可換になる．

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\pi_2} & M_2 \\ {\scriptstyle \pi_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{\pi}_2} \\ M_1 & \xrightarrow[\tilde{\pi}_1]{} & K_2\backslash G/K_1, \end{array}$$

ただし $\tilde{\pi}_i$ は M_i から軌道空間 $K_2\backslash G/K_1$ への射影である．井川は $\theta_1\theta_2 = \theta_2\theta_1$ という条件のもと，Hermann 作用の軌道の第二基本形式を計算した．我々は井川の方法を $(K_2 \times K_1)$ 作用の幾何に適用し，軌道の第二基本形式を計算した．$g \in G$ に対して，L_g (resp. R_g) で G の左移動 (resp. 右移動) を表す．M_1(resp. M_2) 上の L_g (resp. R_g) が誘導する等長変換も同じ記号 L_g (resp. R_g) で表す．

各 $i = 1, 2$ に対して，

$$\mathfrak{m}_i = \{X \in \mathfrak{g} \mid \theta_i(X) = -X\}$$

とおく．このとき，$\mathfrak{g}$ の直交直和分解

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{k}_i \oplus \mathfrak{m}_i$$

が得られる．e を G の単位元とする．M_i の $\pi_i(e)$ における接空間 $T_{\pi_i(e)}M_i$ は $d\pi_i$ によって $\mathfrak{m}_i$ と同一視できる．G の閉部分群 G_{12} を

$$G_{12} = \{g \in G \mid \theta_1(g) = \theta_2(g)\}$$

で定める．このとき，$((G_{12})_0, K_{12})$ はコンパクト対称対である．ただし K_{12} は

$$K_{12} = \{k \in (G_{12})_0 \mid \theta_1(k) = k\}$$

で定義される $(G_{12})_0$ の閉部分群である．$((G_{12})_0, K_{12})$ の標準分解は

$$\mathfrak{g}_{12} = (\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{k}_2) \oplus (\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2)$$

で与えられる．$\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2$ の極大可換部分空間 $\mathfrak{a}$ を一つ取り固定する．すると $\exp(\mathfrak{a})$ は $(G_{12})_0$ 内のトーラス部分群となる．このとき $\exp(\mathfrak{a})$, $\pi_1(\exp(\mathfrak{a}))$, $\pi_2(\exp(\mathfrak{a}))$ はそれぞれ $(K_2 \times K_1)$ 作用，K_2 作用，K_1 作用の切断となる．これらの群作用の軌道空間を調べるために，次のように定義される $\mathfrak{a}$ の同値関係 $\sim$ を考える．$H_1, H_2 \in \mathfrak{a}$ に対して，$(K_2 \times K_1) \cdot \exp(H_1) = (K_2 \times K_1) \cdot \exp(H_2)$ が成り立つとき，$H_1 \sim H_2$ とかく．明らかに $H_1 \sim H_2$ と $K_2 \cdot \pi_1(\exp(H_1)) = K_2 \cdot \pi_1(\exp(H_2))$ は同値であり，同様に，$H_1 \sim H_2$ と $K_1 \cdot \pi_2(\exp(H_1)) = K_1 \cdot \pi_2(\exp(H_2))$ は同値である．よって $\mathfrak{a}/\sim = K_2 \backslash G / K_1$ が得られる．G の部分群 L に対して，

$$N_L(\mathfrak{a}) = \{k \in L \mid \mathrm{Ad}(k)\mathfrak{a} = \mathfrak{a}\},$$
$$Z_L(\mathfrak{a}) = \{k \in L \mid \mathrm{Ad}(k)H = H \ (H \in \mathfrak{a})\}$$

と定義する．このとき，$Z_L(\mathfrak{a})$ は $N_L(\mathfrak{a})$ の正規部分群である．群 $\tilde{J}$ を

$$\tilde{J} = \{([s], Y) \in N_{K_2}(\mathfrak{a})/Z_{K_1 \cap K_2}(\mathfrak{a}) \ltimes \mathfrak{a} \mid \exp(-Y)s \in K_1\}$$

で定義する．$\tilde{J}$ は次のように $\mathfrak{a}$ に作用する．

$$([s], Y) \cdot H = \mathrm{Ad}(s)H + Y \quad (([s], Y) \in \tilde{J}, \ H \in \mathfrak{a}).$$

松木は [9] に於いて

$$K_2 \backslash G / K_1 \cong \mathfrak{a}/\tilde{J}.$$

を示した. 以下 $\theta_1\theta_2 = \theta_2\theta_1$ を仮定する. このとき, $\mathfrak{g}$ の直交直和分解

$$\mathfrak{g} = (\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{k}_2) \oplus (\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2) \oplus (\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{m}_2) \oplus (\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{k}_2)$$

が得られる. $\mathfrak{g}$ の部分空間を次のように定義する.

$$\begin{aligned} \mathfrak{k}_0 &= \{X \in \mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{k}_2 \mid [\mathfrak{a}, X] = \{0\}\}, \\ V(\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{m}_2) &= \{X \in \mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{m}_2 \mid [\mathfrak{a}, X] = \{0\}\}, \\ V(\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{k}_2) &= \{X \in \mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{k}_2 \mid [\mathfrak{a}, X] = \{0\}\}. \end{aligned}$$

$\lambda \in \mathfrak{a}$ に対して,

$$\begin{aligned} \mathfrak{k}_\lambda &= \{X \in \mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{k}_2 \mid [H, [H, X]] = -\langle \lambda, H \rangle^2 X \ (H \in \mathfrak{a})\}, \\ \mathfrak{m}_\lambda &= \{X \in \mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2 \mid [H, [H, X]] = -\langle \lambda, H \rangle^2 X \ (H \in \mathfrak{a})\}, \\ V_\lambda^\perp(\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{m}_2) &= \{X \in \mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{m}_2 \mid [H, [H, X]] = -\langle \lambda, H \rangle^2 X \ (H \in \mathfrak{a})\}, \\ V_\lambda^\perp(\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{k}_2) &= \{X \in \mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{k}_2 \mid [H, [H, X]] = -\langle \lambda, H \rangle^2 X \ (H \in \mathfrak{a})\}. \end{aligned}$$

$\mathfrak{a}$ の部分集合 Σ, W を

$$\begin{aligned} \Sigma &= \{\lambda \in \mathfrak{a} \setminus \{0\} \mid \mathfrak{k}_\lambda \neq \{0\}\}, \\ W &= \{\alpha \in \mathfrak{a} \setminus \{0\} \mid V_\alpha^\perp(\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{m}_2) \neq \{0\}\}, \\ \tilde{\Sigma} &= \Sigma \cup W \end{aligned}$$

と定義する. 各 $\lambda \in \tilde{\Sigma}$ に対して, $\dim \mathfrak{k}_\lambda = \dim \mathfrak{m}_\lambda$, $\dim V_\lambda^\perp(\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{m}_2) = \dim V_\lambda^\perp(\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{k}_2)$ が成り立つ事が知られている. $m(\lambda) := \dim \mathfrak{k}_\lambda$, $n(\lambda) := \dim V_\lambda^\perp(\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{m}_2)$ とおく. Σ は $((G_{12})_0, K_{12})$ の制限ルート系であり, $\tilde{\Sigma}$ は抽象的な意味での $\mathfrak{a}$ の制限ルート系である (see [4]). $\mathfrak{a}$ の基底を一つ取り, その基底に関する $\mathfrak{a}$ 上の辞書式順序を $>$ で表す.

$$\tilde{\Sigma}^+ = \{\lambda \in \tilde{\Sigma} \mid \lambda > 0\},\ \Sigma^+ = \Sigma \cap \tilde{\Sigma}^+,\ W^+ = W \cap \tilde{\Sigma}^+$$

とおく. このとき $\mathfrak{g}$ の直交直和分解

$$\begin{aligned} \mathfrak{g} = \mathfrak{k}_0 \oplus \sum_{\lambda \in \Sigma^+} \mathfrak{k}_\lambda \oplus \mathfrak{a} \oplus \sum_{\lambda \in \Sigma^+} \mathfrak{m}_\lambda \oplus V(\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{m}_2) \oplus \sum_{\alpha \in W^+} V_\alpha^\perp(\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{m}_2) \\ \oplus V(\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{k}_2) \oplus \sum_{\alpha \in W^+} V_\alpha^\perp(\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{k}_2) \end{aligned}$$

が得られる. さらに, 次の補題が成り立つ.

補題 2 ([4] Lemmas 4.3 and 4.16) *1.* 各 $\lambda \in \Sigma^+$ に対して, $\mathfrak{k}_\lambda$ と $\mathfrak{m}_\lambda$ の正規直交基底 $\{S_{\lambda,i}\}_{1\leq i\leq m(\lambda)}$ と $\{T_{\lambda,i}\}_{1\leq i\leq m(\lambda)}$ が存在して, 任意の $H \in \mathfrak{a}$ に対して,

$$[H, S_{\lambda,i}] = \langle\lambda, H\rangle T_{\lambda,i}, \quad [H, T_{\lambda,i}] = -\langle\lambda, H\rangle S_{\lambda,i}, \quad [S_{\lambda,i}, T_{\lambda,i}] = \lambda,$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ad}(\exp H)S_{\lambda,i} &= \cos\langle\lambda, H\rangle S_{\lambda,i} + \sin\langle\lambda, H\rangle T_{\lambda,i},\\
\mathrm{Ad}(\exp H)T_{\lambda,i} &= -\sin\langle\lambda, H\rangle S_{\lambda,i} + \cos\langle\lambda, H\rangle T_{\lambda,i}
\end{aligned}$$

が成り立つ.

2. 各 $\alpha \in W^+$ に対して, $V_\alpha^\perp(\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{m}_2)$ と $V_\alpha^\perp(\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{k}_2)$ の正規直交基底 $\{X_{\alpha,j}\}_{1\leq j\leq n(\alpha)}$ と $\{Y_{\alpha,j}\}_{1\leq j\leq n(\alpha)}$ が存在して, 任意の $H \in \mathfrak{a}$ に対して

$$[H, X_{\alpha,j}] = \langle\alpha, H\rangle Y_{\alpha,j}, \quad [H, Y_{\alpha,j}] = -\langle\alpha, H\rangle X_{\alpha,j}, \quad [X_{\alpha,j}, Y_{\alpha,j}] = \alpha,$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ad}(\exp H)X_{\alpha,j} &= \cos\langle\alpha, H\rangle X_{\alpha,j} + \sin\langle\alpha, H\rangle Y_{\alpha,j},\\
\mathrm{Ad}(\exp H)Y_{\alpha,j} &= -\sin\langle\alpha, H\rangle X_{\alpha,j} + \cos\langle\alpha, H\rangle Y_{\alpha,j}
\end{aligned}$$

が成り立つ.

補題 2 を用いて, 井川は次の定理を証明した.

定理 1 ([4] Corollaries 4.23, 4.29, 4.24, and [2] Theorem 5.3) $g = \exp(H)$ $(H \in \mathfrak{a})$ とする. $K_2\pi_1(g) \subset M_1$ の $\pi_1(g)$ における平均曲率ベクトルを m_H^1 で表す. このとき,

(1)

$$dL_g^{-1} m_H^1 = -\sum_{\substack{\lambda\in\Sigma^+\\ \langle\lambda,H\rangle\notin\pi\mathbb{Z}}} m(\lambda)\cot\langle\lambda, H\rangle\lambda + \sum_{\substack{\alpha\in W^+\\ \langle\alpha,H\rangle\notin(\pi/2)+\pi\mathbb{Z}}} n(\alpha)\tan\langle\alpha, H\rangle\alpha.$$

(2) 軌道 $K_2 \cdot \pi_1(g) \subset M_1$ が *austere* であることと, $\mathfrak{a}$ の部分集合

$$\{-\lambda \cot\langle\lambda, H\rangle \ (\mathit{multiplicity} = m(\lambda)) \mid \lambda \in \Sigma^+, \langle\lambda, H\rangle \notin \pi\mathbb{Z}\}$$
$$\cup\{\alpha \tan\langle\alpha, H\rangle \ (\mathit{multiplicity} = n(\alpha)) \mid \alpha \in W^+, \langle\alpha, H\rangle \notin (\pi/2) + \pi\mathbb{Z}\}$$

が重複度込みで -1 倍で不変となることは同値である.

(3) 軌道 $K_2 \cdot \pi_1(g) \subset M_1$ が全測地的である事と, 任意の $\lambda \in \tilde{\Sigma}^+$ について $\langle\lambda, H\rangle \in (\pi/2)\mathbb{Z}$ が成り立つことは同値である.

定理 1 は軌道 $K_1 \cdot \pi_2(g) \subset M_2$ にも適用できる. したがって次の系を得る.

系 1 軌道 $K_2 \cdot \pi_1(g)$ が極小 *(resp. austere,* 全測地的*)* であることと $K_1 \cdot \pi_2(g)$ が極小 *(resp. austere,* 全測地的*)* であることは同値である.

次に G 上の $(K_2 \times K_1)$ 作用の軌道の第二基本形式について考える. 各 $H \in \mathfrak{a}$ に対して,

$$\Sigma_H = \{\lambda \in \Sigma \mid \langle\lambda, H\rangle \in \pi\mathbb{Z}\},\ W_H = \{\alpha \in W \mid \langle\alpha, H\rangle \in (\pi/2) + \pi\mathbb{Z}\},$$
$$\tilde{\Sigma}_H = \Sigma_H \cup W_H,\ \Sigma_H^+ = \Sigma^+ \cap \Sigma_H,\ W_H^+ = W^+ \cap W_H,\ \tilde{\Sigma}_H^+ = \Sigma_H^+ \cup W_H^+$$

とおく.

$H \in \mathfrak{a}$ に対して $g = \exp(H)$ とおく. このとき

$$\begin{aligned} T_g((K_2 \times K_1) \cdot g) &= \left\{ \left.\frac{d}{dt} \exp(tX_2) g \exp(-tX_1)\right|_{t=0} \ \middle|\ X_1 \in \mathfrak{k}_1,\ X_2 \in \mathfrak{k}_2 \right\} \\ &= dL_g((\mathrm{Ad}(g)^{-1}\mathfrak{k}_2) + \mathfrak{k}_1) \qquad (1) \\ &= dL_g \left(\mathfrak{k}_0 \oplus V(\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{k}_2) \oplus \sum_{\lambda \in \Sigma^+ \setminus \Sigma_H} \mathfrak{m}_\lambda \oplus \sum_{\alpha \in W^+ \setminus W_H} V_\alpha^\perp(\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{k}_2) \right. \\ &\qquad \left. \oplus V(\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{m}_2) \oplus \sum_{\lambda \in \Sigma^+} \mathfrak{k}_\lambda \oplus \sum_{\alpha \in W^+} V_\alpha^\perp(\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{m}_2) \right), \qquad (2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_g^\perp((K_2 \times K_1) \cdot g) &= dL_g((\mathrm{Ad}(g)^{-1}\mathfrak{m}_2) \cap \mathfrak{m}_1) \qquad (3) \\ &= dL_g \left(\mathfrak{a} \oplus \sum_{\lambda \in \Sigma_H^+} \mathfrak{m}_\lambda \oplus \sum_{\alpha \in W_H^+} V_\alpha^\perp(\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{k}_2) \right). \qquad (4) \end{aligned}$$

各 $X = (X_2, X_1) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ に対して, G 上の Killing ベクトル場 X^* を

$$(X^*)_p = \frac{d}{dt} \exp(tX_2) p \exp(-tX_1) \Big|_{t=0} \quad (p \in G)$$

で定める. このとき,

$$(X^*)_p = (dL_p)(\mathrm{Ad}(p)^{-1} X_2 - X_1)$$

が成り立つ. $X_2 = 0$ のとき,X^* は左不変ベクトル場である. ∇ で G の Levi-Civita 接続を表す. Koszul の公式から, 次がわかる.

補題 3 ([10]) $g \in G$, $X = (X_2, X_1)$, $Y = (Y_2, Y_1) \in \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ とする. このとき,

$$(\nabla_{X^*} Y^*)_g = -\frac{1}{2} dL_g [\mathrm{Ad}(g)^{-1} X_2 - X_1, \mathrm{Ad}(g)^{-1} Y_2 + Y_1]$$

が成り立つ.

各 $H \in \mathfrak{a}$ について, 軌道 $(K_2 \times K_1) \cdot g \subset G$ の第二基本形式を B_H で表す. 補題3から, $H \in \mathfrak{a}$ に対して B_H を書き下すことができる.

定理 2 ([10]) $H \in \mathfrak{a}$ に対して, $g = \exp(H)$ とおき,

$$V_1 = \sum_{\lambda \in \Sigma^+ \setminus \Sigma_H} \mathfrak{m}_\lambda \oplus \sum_{\alpha \in W^+ \setminus W_H} V_\alpha^\perp (\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{k}_2),$$
$$V_2 = \sum_{\lambda \in \Sigma^+} \mathfrak{k}_\lambda \oplus \sum_{\alpha \in W^+} V_\alpha^\perp (\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{m}_2).$$

とおく. このとき次が成り立つ.

1. 任意の $X \in \mathfrak{k}_0$ に対して, $B_H(dL_g(X), Y) = 0$ ただし $Y \in T_g((K_2 \times K_1) \cdot g)$.

2. 任意の $X \in V(\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{m}_2)$, に対して

$$dL_g^{-1} B_H(dL_g(X), dL_g(Y)) = \begin{cases} 0 & (Y \in \mathfrak{k}_1 \oplus V(\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{k}_2)) \\ -\frac{1}{2}[X, Y]^\perp & (Y \in V_1). \end{cases}$$

3. 任意の $X \in V(\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{k}_2)$ に対して,

$$dL_g^{-1} B_H(dL_g(X), dL_g(Y)) = \begin{cases} 0 & (Y \in V(\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{k}_2) \oplus V_1) \\ \frac{1}{2}[X, Y]^{\perp} & (Y \in V_2). \end{cases}$$

4. 各 $S_{\lambda,i}$ $(\lambda \in \Sigma^+,\ 1 \le i \le m(\lambda))$ に対して,

$$dL_g^{-1} B_H(dL_g(S_{\lambda,i}), dL_g(Y)) = \begin{cases} 0 & (Y \in V_2) \\ -\frac{1}{2}[S_{\lambda,i}, Y]^{\perp} & (Y \in V_1). \end{cases}$$

5. 各 $X_{\alpha,i}$ $(\alpha \in W^+,\ 1 \le i \le n(\alpha))$ に対して,

$$dL_g^{-1} B_H(dL_g(X_{\alpha,i}), dL_g(Y)) = \begin{cases} 0 & (Y \in V_2) \\ -\frac{1}{2}[X_{\alpha,i}, Y]^{\perp} & (Y \in V_1). \end{cases}$$

6. 各 $T_{\lambda,i}$ $(\lambda \in \Sigma^+ \setminus \Sigma_H,\ 1 \le i \le m(\lambda))$ に対して,

- $dL_g^{-1} B_H(dL_g(T_{\lambda,i}), dL_g(T_{\mu,j})) = \cot\langle \mu, H \rangle [T_{\lambda,i}, S_{\mu,j}]^{\perp}$
  where $\mu \in \Sigma^+ \setminus \Sigma_H,\ 1 \le j \le m(\mu)$.
- $dL_g^{-1} B_H(dL_g(T_{\lambda,i}), dL_g(Y_{\beta,j})) = -\tan\langle \beta, H \rangle [T_{\lambda,i}, X_{\beta,j}]^{\perp}$
  ただし $\beta \in W^+ \setminus W_H,\ 1 \le j \le n(\beta)$.

7. 各 $Y_{\alpha,i}$ $(\alpha \in W^+ \setminus W_H,\ 1 \le i \le n(\alpha))$ に対して,

$$dL_g^{-1} B_H(dL_g(Y_{\alpha,i}), dL_g(Y_{\beta,j})) = -\tan\langle \beta, H \rangle [Y_{\alpha,i}, X_{\beta,j}]^{\perp}$$

ただし $\beta \in W^+ \setminus W_H,\ 1 \le j \le n(\beta))$.

ここに, $X^{\perp}$ は X の法成分を表す, つまり接ベクトル $X \in \mathfrak{g}$ の $((\mathrm{Ad}(g)^{-1}\mathfrak{m}_2) \cap \mathfrak{m}_1)$ 成分である.

$(K_2 \times K_1) \cdot g \subset G$ の g における平均曲率ベクトルを m_H で表す. 定理 2 により, 次の系を得る.

系 2 各 $H \in \mathfrak{a}$ に対して,

$$dL_g^{-1} m_H = -\sum_{\lambda \in \Sigma^+ \setminus \Sigma_H} m(\lambda) \cot\langle \lambda, H \rangle \lambda + \sum_{\alpha \in W^+ \setminus W_H} n(\alpha) \tan\langle \alpha, H \rangle \alpha.$$

さらに $dL_g^{-1} m_H = dL_g^{-1} m_H^1$ が成り立つ. よって, 軌道 $(K_2 \times K_1) \cdot g \subset G$ が極小であることと, $K_2 \cdot \pi_1(g) \subset M_1$ が極小であることは同値である.

次は G への $(K_2 \times K_1)$ 作用の austere 軌道について考える.

三対 $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ を用いて, 井川は K_2 作用の軌道が austere になるための必要十分条件を与えている.

同様に G への $(K_2 \times K_1)$ 作用についても, 軌道が austere となるための必要十分条件を与えることができる. 各法ベクトル $dL_g \xi \in T_g^{\perp}(K_2 \times K_1) \cdot g \cong dL_g((\mathrm{Ad}(g)^{-1}\mathfrak{m}_2) \cap \mathfrak{m}_1)$ について, $(K_1 \times K_2) \cdot g \subset G$ の形作用素 $A^{dL_g \xi}$ の固有値の集合を調べる.

G への $(K_2 \times K_1)$ 作用の g におけるイソトロピー部分群 $(K_2 \times K_1)_g$ は, K_1 作用の $\pi_2(g)$ におけるイソトロピー部分群 $(K_1)_{\pi_2(g)}$ と同型である. イソトロピー部分群 $(K_2 \times K_1)_g$ は作用の微分によって法空間 $T_g^{\perp}((K_2 \times K_1) \cdot g)$ に表現を持つ. このとき,

$$d(k_2, k_1)_g(dL_g(\xi)) = \frac{d}{dt} k_2 g \exp(t\xi) k_1^{-1} \Big|_{t=0} = dL_g(\mathrm{Ad}(k_1)\xi)$$

は成り立つ. したがって, この $(K_2 \times K_1)_g$ の表現は $(K_1)_{\pi_2(g)}$ の随伴表現の $(\mathrm{Ad}(g)^{-1}\mathfrak{m}_2) \cap \mathfrak{m}_1$ への制限に一致する. いま, $\mathrm{Lie}((K_1)_{\pi_2(g)}) = \mathfrak{k}_1 \cap (\mathrm{Ad}(g)^{-1}\mathfrak{k}_2)$ であるから, Lie 環 $\mathrm{Lie}((K_1)_{\pi_2(g)}) \oplus ((\mathrm{Ad}(g)^{-1}\mathfrak{m}_2) \cap \mathfrak{m}_1)$ は θ_1 に関して直交対称 Lie 代数の構造を持つ. さらに, $g \in \exp(\mathfrak{a})$ であるとき, $\mathfrak{a}$ は $((\mathrm{Ad}(g)^{-1}\mathfrak{m}_2) \cap \mathfrak{m}_1)$ の極大可換部分空間である. したがって, $\mathfrak{a}$ は $(K_1)_{\pi_2(g)}$ の $(\mathrm{Ad}(g)^{-1}\mathfrak{m}_2) \cap \mathfrak{m}_1$ への表現の切断になる. よって,

$$\bigcup_{(k_2,k_1) \in (K_2 \times K_1)_g} d(k_2, k_1)_g dL_g \mathfrak{a} = T_g^{\perp}(K_2 \times K_1) \cdot g \tag{5}$$

を得る. よって, 一般性を失うことなく $\xi \in \mathfrak{a}$ として良い.

すると, 定理2より

$$A^{dL_g\xi}(dL_g(S_{\lambda,i}), dL_g(T_{\lambda,i})) \tag{6}$$
$$= (dL_g(S_{\lambda,i}), dL_g(T_{\lambda,i}))\begin{bmatrix} 0 & -(1/2)\langle\lambda,\xi\rangle \\ -(1/2)\langle\lambda,\xi\rangle & -\cot\langle\lambda,H\rangle\langle\lambda,\xi\rangle \end{bmatrix}$$
$$(\lambda\in\Sigma^+\setminus\Sigma_H,\ 1\le i\le m(\lambda)),$$
$$A^{dL_g\xi}(dL_g(X_{\alpha,j}), dL_g(Y_{\alpha,j})) \tag{7}$$
$$= (dL_g(X_{\alpha,j}), dL_g(Y_{\alpha,j}))\begin{bmatrix} 0 & -(1/2)\langle\alpha,\xi\rangle \\ -(1/2)\langle\alpha,\xi\rangle & \tan\langle\alpha,H\rangle\langle\alpha,\xi\rangle \end{bmatrix}$$
$$(\alpha\in W^+\setminus W_H,\ 1\le j\le n(\alpha)),$$

と, 各 $X\in\mathfrak{k}_0\oplus V(\mathfrak{k}_1\cap\mathfrak{m}_2)\oplus V(\mathfrak{m}_1\cap\mathfrak{k}_2)\oplus\sum_{\lambda\in\Sigma_H^+}\mathfrak{k}_\lambda\oplus\sum_{\alpha\in W_H^+}V_\alpha^\perp(\mathfrak{k}_1\cap\mathfrak{m}_2)$ について,

$$A^{dL_g\xi}dL_g(X)=0. \tag{8}$$

が従う. したがって, $A^{dL_g\xi}$ の固有値の集合は次で与えられる.

$$\left\{-\frac{\cos\langle\lambda,H\rangle\pm1}{2\sin\langle\lambda,H\rangle}\langle\lambda,\xi\rangle\ (\text{multiplicity}=m(\lambda))\ \middle|\ \lambda\in\Sigma^+\setminus\Sigma_H\right\} \tag{9}$$
$$\cup\left\{\frac{\sin\langle\alpha,H\rangle\pm1}{2\cos\langle\alpha,H\rangle}\langle\alpha,\xi\rangle\ (\text{multiplicity}=n(\alpha))\ \middle|\ \alpha\in W^+\setminus W_H\right\}$$
$$\cup\{0\ (\text{multiplicity}=l)\}$$

ただし $l=\dim(\mathfrak{k}_0\oplus\sum_{\lambda\in\Sigma_H}\mathfrak{k}_\lambda\oplus V(\mathfrak{k}_1\cap\mathfrak{m}_2)\oplus\sum_{\alpha\in W_H}V_\alpha^\perp(\mathfrak{k}_1\cap\mathfrak{m}_2)\oplus V(\mathfrak{m}_1\cap\mathfrak{k}_2))$.

命題 3 ([6] p.459) E を有限次元内積空間 $\mathfrak{a}$ の有限部分集合とする. このとき, (i) と (ii) は同値である.

(i) 任意の $\xi\in\mathfrak{a}$ に対して, 重複度付きの集合 $\{\langle a,\xi\rangle \mid a\in E\}$ が -1 倍で不変.

(ii) 集合 E が -1 倍で不変.

よって次の系を得る.

系 3 $H \in \mathfrak{a}$ に対して $g = \exp(H)$ とおく. 軌道 $(K_2 \times K_1) \cdot g \subset G$ が *austere* であることと次の $\mathfrak{a}$ の有限部分集合

$$\left\{ -\frac{\cos\langle\lambda, H\rangle \pm 1}{2\sin\langle\lambda, H\rangle}\lambda \ (\text{multiplicity} = m(\lambda)) \ \middle| \ \lambda \in \Sigma^+ \setminus \Sigma_H \right\}$$
$$\cup \left\{ \frac{\sin\langle\alpha, H\rangle \pm 1}{2\cos\langle\alpha, H\rangle}\alpha \ (\text{multiplicity} = n(\alpha)) \ \middle| \ \alpha \in W^+ \setminus W_H \right\}$$

が -1 倍で不変であることは同値である.

さらに次の命題が成り立つ.

命題 4 ([10]) 各 $H \in \mathfrak{a}$ について,

$$\begin{aligned} E =& \{-\lambda\cot\langle\lambda, H\rangle \ (\text{multiplicity} = m(\lambda)) \mid \lambda \in \Sigma^+ \setminus \Sigma_H\} \\ &\cup \{\alpha\tan\langle\alpha, H\rangle \ (\text{multiplicity} = n(\alpha)) \mid \alpha \in W^+ \setminus W_H\} \end{aligned}$$

が重複度込みで -1 倍で不変であることと,

$$E' = \left\{ -\frac{\cos\langle\lambda, H\rangle \pm 1}{2\sin\langle\lambda, H\rangle}\lambda \ (\text{multiplicity} = m(\lambda)) \ \middle| \ \lambda \in \Sigma^+ \setminus \Sigma_H \right\}$$
$$\cup \left\{ \frac{\sin\langle\alpha, H\rangle \pm 1}{2\cos\langle\alpha, H\rangle}\alpha \ (\text{multiplicity} = n(\alpha)) \ \middle| \ \alpha \in W^+ \setminus W_H \right\}$$

が重複度込みで -1 倍で不変であることは同値である.

系 4 $g = \exp(H)$ $(H \in \mathfrak{a})$ とする. 軌道 $(K_2 \times K_1) \cdot g \subset G$ が *austere* であることと $K_2 \cdot \pi_1(g) \subset M_1$ が *austere* であることは同値である.

注意 1 全測地的軌道についてはこのような対応は無い. 例えば, θ_1 と θ_2 が $\mathfrak{g}$ の内部自己同型で互いに移り合わないとき, $(K_2 \times K_1) \cdot e \subset G$ は全測地的でないが, $K_2 \cdot \pi_1(e) \subset M_1$ は全測地的である.

4 主定理

前の説では $(K_2 \times K_1)$ 作用と K_2 の軌道の austere 性の対応について述べた. この節では $(K_2 \times K_1)$ 作用と K_2 作用と K_1 作用の軌道の弱鏡映性について考え, 軌道が弱鏡映性を持つための十分条件を 2 つ与える.

ひとつ目の十分条件は次の定理である.

定理 3 ([10]) K_1 と K_2 は連結であると仮定する. $H \in \mathfrak{a}$ に対して $g = \exp(H)$ とおく. もし任意の $\lambda \in \tilde{\Sigma}$ に対して $\langle \lambda, H \rangle \in (\pi/2)\mathbb{Z}$ ならば, 軌道 $(K_2 \times K_1) \cdot g \subset G$ は弱鏡映である.

Proof. $\sigma = L_g \theta_1 L_g^{-1}$. とおく. このとき, σ は次の 3 つの性質を持つ.

$\sigma(g) = g$, $\sigma((K_2 \times K_1) \cdot g) = (K_2 \times K_1) \cdot g$, $d\sigma(\xi) = -\xi \quad (\xi \in T_g^{\perp}((K_2 \times K_1) \cdot g))$.

明らかに $\sigma(g) = g$ は満たす. また, 補題 2, より $\mathrm{Ad}(g^2)\mathfrak{k}_2 = \mathfrak{k}_2$ となる. K_2 が連結であることから, $g^2 K_2 g^{-2} = K_2$ を得る. 加えて $\theta_1\theta_2 = \theta_2\theta_1$ より, $\theta_1 \mathfrak{k}_2 = \mathfrak{k}_2$ である. よって $\theta_1(K_2) = K_2$ であり, したがって各 $(k_2, k_1) \in K_2 \times K_1$ について,

$$\sigma(k_2 g k_1^{-1}) = (g^2 \theta_1(k_2) g^{-2}) g k_1^{-1} \in (K_2 \times K_1) \cdot g$$

が成り立つ. すなわち $\sigma((K_2 \times K_1) \cdot g) = (K_2 \times K_1) \cdot g$ である. $T_g^{\perp}((K_2 \times K_1) \cdot g) = dL_g(\mathrm{Ad}(g)^{-1}(\mathfrak{m}_2) \cap \mathfrak{m}_1)$ だから,

$$d\sigma(\xi) = dL_g \theta_1(dL_g^{-1}(\xi)) = -dL_g dL_g^{-1}(\xi) = -\xi.$$

よって σ は $(K_2 \times K_1) \cdot g$ の g における任意の法ベクトル $dL_g \xi \in T_g^{\perp}((K_2 \times K_1) \cdot g)$ に沿った弱鏡映となる. □

系 5 軌道 $(K_2 \times K_1) \cdot e \subset G$ は弱鏡映である.

注意 2 定理 3 と同じ仮定のもと, $K_2 \cdot \pi_1(g) \subset M_1$ と $K_1 \cdot \pi_2(g) \subset M_2$ は弱鏡映部分多様体であることが証明できる. しかし, 井川は更に強く $K_2 \cdot \pi_1(g) \subset M_1$ と $K_1 \cdot \pi_2(g) \subset M_2$ は鏡映部分多様体であることを示し

ている．よって $K_2 \cdot \pi_1(g) \subset M_1$ と $K_1 \cdot \pi_2(g) \subset M_2$ は全測地的であるが，$(K_2 \times K_1) \cdot g$ は全測地的であるとは限らない．実際，θ_1 と θ_2 が $\mathfrak{g}$ の任意の内部自己同型で移り合わないとき，，G 上の $(K_2 \times K_1)$ 作用に全測地的軌道は存在しない．

$\tilde{W}(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ を

$$\left\{ \left(s_\lambda, \frac{2n\pi}{\langle \lambda, \lambda \rangle}\lambda \right) \;\middle|\; \lambda \in \Sigma,\ n \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \left(s_\alpha, \frac{(2n+1)\pi}{\langle \alpha, \alpha \rangle}\alpha \right) \;\middle|\; \alpha \in W,\ n \in \mathbb{Z} \right\}.$$

で生成されるアフィン群 $O(\mathfrak{a}) \ltimes \mathfrak{a}$ の部分群とする．次の補題が知られている．

補題 4 ([4] Lemmas 4.4 and 4.21)

$$\tilde{W}(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W) \subset \tilde{J}$$

この補題を用いて次の補題が示される．

補題 5 ([10]) *$H \in \mathfrak{a}$ 対して $g = \exp(H)$ とおく．このとき各 $\lambda \in \tilde{\Sigma}_H$ について，ある $k_\lambda \in N_{K_2}(\mathfrak{a})$ が存在して，*

1.

$$\left(k_\lambda,\ \exp\left(-\frac{2\langle \lambda, H \rangle}{\langle \lambda, \lambda \rangle}\lambda \right) k_\lambda \right) \in (K_2 \times K_1)_g,$$

2.

$$d\left(k_\lambda,\ \exp\left(-\frac{2\langle \lambda, H \rangle}{\langle \lambda, \lambda \rangle}\lambda \right) k_\lambda \right)_g (dL_g \xi) = dL_g(s_\lambda \xi) \quad (\xi \in \mathfrak{a})$$

を満たす．

Proof. $\tilde{W}(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ の定義から，各 $\lambda \in \tilde{\Sigma}_H$ に対して，

$$\left(s_\lambda, 2\frac{\langle \lambda, H \rangle}{\langle \lambda, \lambda \rangle}\lambda \right) \in \tilde{W}(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$$

が成り立つ．$\tilde{W}(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W) \subset \tilde{J}$ であるから，ある $k_\lambda \in N_{K_2}(\mathfrak{a})$ が存在して，

$$\left([k_\lambda], 2\frac{\langle \lambda, H \rangle}{\langle \lambda, \lambda \rangle}\lambda \right) = \left(s_\lambda, 2\frac{\langle \lambda, H \rangle}{\langle \lambda, \lambda \rangle}\lambda \right)$$

を満たす. $\tilde{J}$ の定義から,

$$\exp\left(-2\frac{\langle\lambda, H\rangle}{\langle\lambda, \lambda\rangle}\lambda\right) k_\lambda \in K_1$$

を得る. 1 については,

$$\left(k_\lambda,\ \exp\left(-\frac{2\langle\lambda, H\rangle}{\langle\lambda, \lambda\rangle}\lambda\right) k_\lambda\right) g = k_\lambda \exp(H) k_\lambda^{-1} \exp\left(\frac{2\langle\lambda, H\rangle}{\langle\lambda, \lambda\rangle}\lambda\right)$$
$$= \exp\left(\mathrm{Ad}(k_\lambda) H\right) \exp\left(\frac{2\langle\lambda, H\rangle}{\langle\lambda, \lambda\rangle}\lambda\right) = \exp\left(s_\lambda H + \frac{2\langle\lambda, H\rangle}{\langle\lambda, \lambda\rangle}\lambda\right) = \exp(H) = g,$$

2 については

$$d\left(k_\lambda,\ \exp\left(-\frac{2\langle\lambda, H\rangle}{\langle\lambda, \lambda\rangle}\lambda\right) k_\lambda\right)_g (dL_g \xi) = \frac{d}{dt}\exp\left(H + t s_\lambda(\xi)\right)\Big|_{t=0} = dL_g s_\lambda(\xi)$$

となる. □

命題 5 ([10]) 任意の $H \in \mathfrak{a}$ について, $\tilde{\Sigma}_H$ が空でなければ, $\tilde{\Sigma}_H$ は $\mathrm{Span}(\tilde{\Sigma}_H)$ の制限ルート系である.

注意 3 命題 5 と定理 5 から, $\mathfrak{a}$ の任意の対称三対と $H \in \mathfrak{a}$ に対して, $\tilde{\Sigma}_H$ が空でなければ, $\tilde{\Sigma}_H$ は $\mathrm{Span}(\tilde{\Sigma}_H)$ の制限ルート系である.

各 $H \in \mathfrak{a}$ について, $W(\tilde{\Sigma}_H)$ で $\tilde{\Sigma}_H$ の Weyl 群を表す. ふたつ目の十分条件が

次である.

定理 4 ([10]) $H \in \mathfrak{a}$ に対して $g = \exp(H)$ とおく. もし $\mathrm{Span}(\tilde{\Sigma}_H) = \mathfrak{a}$ かつ $-\mathrm{id}_{\mathfrak{a}} \in W(\tilde{\Sigma}_H)$ ならば, $(K_2 \times K_1)\cdot g \subset G$, $K_2 \cdot \pi_1(g) \subset M_1$, $K_1 \cdot \pi_2(g) \subset M_2$ は弱鏡映である.

Proof. (5) 式から, 各 $\xi \in \mathfrak{a}$ について法ベクトル $dL_g\xi$ に沿った弱鏡映の存在が示されれば良い. $-\mathrm{id}_{\mathfrak{a}} \in W(\tilde{\Sigma}_H)$ だから, ある $\mu_1, \ldots, \mu_l \in \tilde{\Sigma}_H$ が存在し, $s_{\mu_1} \cdots s_{\mu_l} = -\mathrm{id}_{\mathfrak{a}}$ を満たす. すると, 補題 5 より, 各 μ_i $(1 \le i \le l)$ について $k_{\mu_i} \in N_{K_2}(\mathfrak{a})$ が存在する.

$$k'_{\mu_i} = \exp\left(-2\frac{\langle \mu_i, H\rangle}{\langle \mu_i, \mu_i\rangle}\mu_i\right) k_{\mu_i} \in K_1,$$

とおき,

$$\sigma = (k_{\mu_1},\ k'_{\mu_1}) \cdots (k_{\mu_l},\ k'_{\mu_l}) \in (K_2 \times K_1)_g$$

と定める．このとき, σ は任意の $\xi \in \mathfrak{a}$ に対して $(K_2 \times K_1) \cdot g$ の $dL_g\xi$ に沿った弱鏡映となる．実際,

$$\sigma(g) = g, \quad \sigma((K_2 \times K_1) \cdot g) = (K_2 \times K_1) \cdot g,$$
$$d\sigma(dL_g(\xi)) = dL_g s_{\mu_1} \cdots s_{\mu_l}(\xi) = -dL_g\xi$$

が成り立つ．同様に, $\sigma_1 = k_{\mu_1} \cdots k_{\mu_l}$ は $K_2 \cdot \pi_1(g)$ の $\pi_1(g)$ における $dL_g\xi$ に沿った弱鏡映となり, $\sigma_2 = k'_{\mu_1} \cdots k'_{\mu_l}$ は $K_1 \cdot \pi_2(g)$ の $\pi_2(g)$ における $dR_g\xi$ に沿った弱鏡映となる．□

[6] ではおもに S^n と $\mathbb{C}P^n$ 内の弱鏡映部分多様体について研究されていた．階数 1 の対称空間への Hermann 作用の余等質性は 1 になる．したがって, 命題 1 から, 階数 1 のコンパクト対称空間への Hermann 作用の特異軌道は弱鏡映である．Hermann 作用の余等質性が 2 以上の場合, 定理 4 や定理 3 を適用することによって, コンパクト対称空間内の弱鏡映部分多様体の例が得られる．これらの定理を適用するためには, 作用の austere 軌道を探しだす必要がある．コンパクト対称三対 (G, K_1, K_2) が誘導する $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ が対称三対となる場合に, 井川は [4] で austere 軌道を分類している．また, [5] においては, $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ が対称三対となるための十分条件を次のように与えている．

(G, K_1, K_2) に対して, 条件 (A), (B), (C) を次のように定める．

(A) G が単純で θ_1 と θ_2 が $\mathfrak{g}$ の任意の内部自己同型で移り合わない．

(B) あるコンパクト単純 Lie 群 U と U の対称部分群 $\overline{K}$ が存在して,

$$G = U \times U, \quad K_1 = \Delta G = \{(u, u) \mid u \in U\}, \quad K_2 = \overline{K} \times \overline{K}$$

を満たす．

(C) あるコンパクト単純 Lie 群 U とその対合的外部自己同型 σ が存在して,

$$G = U \times U, \quad K_1 = \Delta G = \{(u,u) \mid u \in U\},$$
$$K_2 = \{(u_1,u_2) \mid (\sigma(u_2),\ \sigma(u_1)) = (u_1,u_2)\}$$

を満たす.

このとき, 次の定理が成り立つ.

定理 5 ([5]) (G, K_1, K_2) を条件 *(A), (B), (C)* のどれかを満たすコンパクト対称三対とする. このとき上のように定義される三対 $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ は重複度付き対称三対である. 逆に任意の対称三対はこの方法で得られる.

さらに, Weyl 群が $-\mathrm{id}_{\mathfrak{a}}$ を含むための条件は次のように知られている.

命題 6 ([11]) Σ を $\mathfrak{a}$ の既約制限ルート系とする. このとき, $-\mathrm{id}_{\mathfrak{a}} \notin W(\Sigma)$ と $\Sigma \cong \mathrm{A}_r,\ \mathrm{D}_{2r+1},\ \mathrm{E}_6\ (r \geq 2)$ は同値である.

[10] では, これらの事実を用いて, コンパクト対称空間内の弱鏡映部分多様体を数多く構成した. 以下ではその例の一つを紹介する.

$(G, K_1, K_2) = (\mathrm{SU}(n), \mathrm{SO}(n), \mathrm{S}(\mathrm{U}(r) \times \mathrm{U}(n-r)))\ (r < n-r)$ とする. $M_1 = \mathrm{SU}(n)/\mathrm{SO}(n)$, M_2 は複素 Grassmann 多様体 $M_2 = G_r(\mathbb{C}^n)$ である. このとき, $\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2$ の極大可換部分空間 $\mathfrak{a}$ の次元は r である. $\mathfrak{a}$ のある正規直交基底 $\{e_1, \ldots, e_r\}$ について,

$$\begin{aligned}
\Sigma =& \mathrm{B}_r = \{\pm e_i \mid 1 \leq i \leq r\} \cup \{\pm e_i \pm e_j \mid 1 \leq i < j \leq r\}, \\
W =& \mathrm{BC}_r = \{\pm e_i \mid 1 \leq i \leq r\} \cup \{\pm e_i \pm e_j \mid 1 \leq i < j \leq r\} \\
& \cup \{\pm 2e_i \mid 1 \leq i \leq r\}
\end{aligned}$$

がわかる. (G, K_1, K_2) は定理 5 の条件 (A) を満たすため, $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ は $\mathfrak{a}$ の重複度付き対称三対となり, II-BC_r 型と呼ばれる. この場合, Hermann 作用及び G 上の $(K_2 \times K_1)$ 作用の軌道空間は, $\mathfrak{a}$ 内の単体,

$$\overline{P}_0 = \left\{ H = \sum_{j=1}^{r} t_j H_j \;\middle|\; \sum_{j=1}^{r} t_j \leq 1 \right\}$$

と同一視できる．ただし，$H_j = \sum_{i=1}^{j} e_i$ $(1 \leq j \leq r)$ とおいた．つまり，各 $H \in \overline{P}_0$ に対して，3 つの作用の軌道 $(K_2 \times K_1) \cdot \exp(H) \subset G$, $K_2 \cdot \pi_1(\exp(H)) \subset M_1$, $K_1 \cdot \pi_2(\exp(H)) \subset M_2$ がそれぞれ定まり，逆に全ての軌道はこの形で表される．

$H \in \overline{P}_0$ に対して，$H = 0$ と $K_2 \cdot \pi_1(\exp(H)) \subset M_1$, $K_1 \cdot \pi_2(\exp(H)) \subset M_2$ が全測地的である事は同値である．また $H = H_i$ $(1 \leq i \leq r)$ と $(K_2 \times K_1) \cdot \exp(H) \subset G$, $K_2 \cdot \pi_1(\exp(H)) \subset M_1$, $K_1 \cdot \pi_2(\exp(H)) \subset M_2$ が全測地的でない austere 部分多様体であることは同値である．

$H = 0$ のとき，定理 3 より $(K_2 \times K_1) \cdot \exp(H) \subset G$ は弱鏡映部分多様体である．さらに θ_1 と θ_2 は $\mathfrak{g}$ の内部自己同型で移り合わないため，$(K_2 \times K_1) \cdot \exp(H) \subset G$ は鏡映でない弱鏡映部分多様体となる．

$H = H_i$ $(1 \leq i \leq r)$ のとき，簡単な計算で $\tilde{\Sigma}_{H_i} \cong \mathrm{C}_i \oplus \mathrm{B}_{r-i}$ がわかる．よって，命題 6 より，$-\mathrm{id}_{\mathfrak{a}} \in W(\tilde{\Sigma}_H)$ がわかる．このとき，定理 4 より，$(K_2 \times K_1) \cdot \exp(H) \subset G$, $K_2 \cdot \pi_1(\exp(H)) \subset M_1$, $K_1 \cdot \pi_2(\exp(H)) \subset M_2$ は弱鏡映部分多様体となる．

この他にも II-BC$_r$ 型の重複度付き対称三対を持つコンパクト対称三対には

1. $(\mathrm{SO}(4r+2),\ \mathrm{SO}(2r+1) \times \mathrm{SO}(2r+1),\ \mathrm{U}(2r+1))$,
2. $(E_6,\ \mathrm{Sp}(4),\ \mathrm{SO}(10) \cdot \mathrm{U}(1)) \quad (r = 2)$.

があり，これらの場合にも同様の議論で弱鏡映部分多様体を構成することができる．よって対称三対を用いることで，例外型のコンパクト対称空間内の弱鏡映部分多様体を構成できる．他の型の対称三対に関しても，井川の austere 軌道の分類を用いて，数多くのコンパクト対称空間内の弱鏡映部分多様体を構成できる．

5 重複度付き対称三対の例

この節では，コンパクト対称三対 $(G, K_1, K_2) = (\mathrm{SU}(n), \mathrm{SO}(n), \mathrm{S}(\mathrm{U}(r) \times \mathrm{U}(n-r)))$ $(r < n-r)$ に対して，重複度付き対称三対 $(\tilde{\Sigma}, \Sigma, W)$ を具体的

に構成する．E_i^j で i 行 j 列の成分のみ 1 で他の成分が 0 である n 次正方行列を表す．E_i^j を用いていくつか記号を定める．

$$A_i^j = E_i^j - E_j^i, \quad S_i^j = E_i^j + E_j^i, \quad D_i^j = E_i^i - E_j^j.$$

$S_i^i = 2E_i^i$ に注意する．$\mathfrak{g} = \mathfrak{su}(n)$ に $\langle X, Y\rangle = (1/2)\mathrm{tr}(X\overline{Y})$ で内積を定める．このとき，$\theta_1(X) = \overline{X}, \quad \theta_2(X) = I_{r,n-r}XI_{r,n-r}$ と定める．ただし，$I_{r,n-r} = \sum_{i=1}^r E_i^i - \sum_{i=r+1}^n E_i^i$ である．このとき $\theta_1\theta_2 = \theta_2\theta_1$ が成り立つ．すると

$$\begin{aligned}
\mathfrak{g} =& \mathfrak{su}(n) = \sum_{1\leq i<j\leq n} \mathbb{R}A_i^j \oplus \sum_{1\leq i<j\leq n} \sqrt{-1}\mathbb{R}S_i^j \oplus \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{-1}\mathbb{R}D_i^{i+1},\\
\mathfrak{k}_1 =& \mathfrak{o}(n) = \sum_{1\leq i<j\leq n} \mathbb{R}A_i^j,\\
\mathfrak{k}_2 =& \mathfrak{s}(\mathfrak{u}(r) \oplus \mathfrak{u}(n-r))\\
=& \sum_{1\leq i<j\leq r} \mathbb{R}A_i^j \oplus \sum_{1\leq i<j\leq r} \sqrt{-1}\mathbb{R}S_i^j\\
& \oplus \sum_{r+1\leq i<j\leq n} \mathbb{R}A_i^j \oplus \sum_{r+1\leq i<j\leq n} \sqrt{-1}\mathbb{R}S_i^j \oplus \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{-1}\mathbb{R}D_i^{i+1}
\end{aligned}$$

は直交直和分解である．さらに，

$$\begin{aligned}
\mathfrak{m}_1 &= \sum_{1\leq i<j\leq n} \sqrt{-1}\mathbb{R}S_i^j \oplus \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{-1}\mathbb{R}D_i^{i+1}\\
\mathfrak{m}_2 &= \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=r+1}^{n} \mathbb{R}A_i^j \oplus \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=r+1}^{n} \sqrt{-1}\mathbb{R}S_i^j
\end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned}
\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{k}_2 &= \sum_{1 \le i < j \le r} \mathbb{R} A_i^j \oplus \sum_{r+1 \le i < j \le n} \mathbb{R} A_i^j, \\
\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2 &= \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=r+1}^{n} \sqrt{-1} \mathbb{R} S_i^j, \\
\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{m}_2 &= \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=r+1}^{n} \mathbb{R} A_i^j, \\
\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{k}_2 &= \sum_{1 \le i < j \le r} \sqrt{-1} \mathbb{R} S_i^j \oplus \sum_{r+1 \le i < j \le n} \sqrt{-1} \mathbb{R} S_i^j \oplus \sum_{i=1}^{n-1} \sqrt{-1} \mathbb{R} D_i^{i+1}
\end{aligned}$$

が成り立つ.

補題 6 各 $1 \le i, j, k, l \le n$ に対して次が成り立つ.

$$\begin{aligned}
[E_i^j, E_k^l] &= \delta_{jk} E_i^l - \delta_{il} E_k^j, \\
[A_i^j, A_k^l] &= \delta_{jk} A_i^l + \delta_{il} A_j^k - \delta_{jl} A_i^k - \delta_{ik} A_j^l, \\
[S_i^j, S_k^l] &= \delta_{jk} A_i^l + \delta_{il} A_j^k - \delta_{jl} A_i^k - \delta_{ik} A_j^l, \\
[A_i^j, S_k^l] &= \delta_{jk} S_i^l - \delta_{il} S_j^k + \delta_{jl} S_i^k - \delta_{ik} S_j^l, \\
[A_i^j, D_k^l] &= \delta_{jk} S_i^k - \delta_{ik} S_j^k - \delta_{jl} S_i^l + \delta_{il} S_j^l, \\
[S_i^j, D_k^l] &= \delta_{jk} A_i^k + \delta_{ik} A_j^k - \delta_{jl} A_i^l - \delta_{il} A_j^l, \\
[D_i^j, D_k^l] &= 0.
\end{aligned}$$

ここで,

$$\mathfrak{a} = \sum_{i=1}^{r} \sqrt{-1} \mathbb{R} S_i^{i+r}$$

とおくと, $\mathfrak{a}$ は $\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2$ の極大可換部分空間である.

$H = \sum_{i=i}^{r} x_i \sqrt{-1} S_i^{i+r} \in \mathfrak{a}$ とする. $\langle \sqrt{-1} S_i^{i+r}, \sqrt{-1} S_i^{i+r} \rangle = 1$ である. $e_i = \sqrt{-1} S_i^{i+r}$ とおけば, $\{e_i \mid 1 \le i \le r\}$ は $\mathfrak{a}$ の正規直交基底を定める.

$1 \leq k < l \leq r$ に対して,

$$[H, \sqrt{-1}(S_k^{l+r} + S_{k+r}^l)] = [\sqrt{-1}(x_k S_k^{k+r} + x_l S_l^{l+r}), \sqrt{-1}(S_k^{l+r} + S_{k+r}^l)]$$
$$= -[(x_k S_k^{k+r} + x_l S_l^{l+r}), (S_k^{l+r} + S_{k+r}^l)]$$
$$= -(x_k[S_k^{k+r}, (S_k^{l+r} + S_{k+r}^l)] + x_l[S_l^{l+r}, (S_k^{l+r} + S_{k+r}^l)])$$
$$= -\{x_k(A_{k+r}^{l+r} + A_k^l) + x_l(A_l^k + A_{l+r}^{k+r})\} = -(x_k - x_l)(A_{k+r}^{l+r} + A_k^l).$$

さらに,

$$[H, (A_{k+r}^{l+r} + A_k^l)] = [\sqrt{-1}(x_k S_k^{k+r} + x_l S_l^{l+r}), (A_{k+r}^{l+r} + A_k^l)]$$
$$= \sqrt{-1}(x_k[S_k^{k+r}, A_{k+r}^{l+r} + A_k^l] + x_l[S_l^{l+r}, A_{k+r}^{l+r} + A_k^l])$$
$$= \sqrt{-1}\{x_k(S_k^{l+r} + S_{k+r}^l) + x_l(-S_l^{k+r} - S_{l+r}^l)\}$$
$$= \sqrt{-1}(x_k - x_l)(S_k^{l+r} + S_{k+r}^l).$$

$x_k = \langle \sqrt{-1}S_k^{k+r}, H \rangle, x_l = \langle \sqrt{-1}S_l^{l+r}, H \rangle$ に注意すれば,

$$[H, \sqrt{-1}(S_k^{l+r} + S_{k+r}^l)] = -\langle \sqrt{-1}(S_k^{k+r} - S_l^{l+r}), H \rangle (A_{k+r}^{l+r} + A_k^l),$$
$$[H, (A_{k+r}^{l+r} + A_k^l)] = \langle \sqrt{-1}(S_k^{k+r} - S_l^{l+r}), H \rangle \sqrt{-1}(S_k^{l+r} + S_{k+r}^l)$$

がわかった. したがって, $(A_{k+r}^{l+r} + A_k^l) \in \mathfrak{k}_{e_k - e_l}$, $\sqrt{-1}(S_k^{l+r} + S_{k+r}^l) \in \mathfrak{m}_{e_k - e_l}$ となり, $e_k - e_l \in \Sigma$ が分かった. 同様にして,

$$[H, \sqrt{-1}(S_k^{l+r} - S_{k+r}^l)] = -\langle \sqrt{-1}(S_k^{k+r} + S_l^{l+r}), H \rangle (A_{k+r}^{l+r} - A_k^l),$$
$$[H, (A_{k+r}^{l+r} - A_k^l)] = \langle \sqrt{-1}(S_k^{k+r} + S_l^{l+r}), H \rangle \sqrt{-1}(S_k^{l+r} - S_{k+r}^l).$$

したがって, $(A_{k+r}^{l+r} - A_k^l) \in \mathfrak{k}_{e_k + e_l}$, $\sqrt{-1}(S_k^{l+r} - S_{k+r}^l) \in \mathfrak{m}_{e_k + e_l}$ となり, $e_k + e_l \in \Sigma$ が分かった. また, $r+1 \leq k \leq 2r, 2r+1 \leq l \leq n$ に対して,

$$[H, A_k^l] = [x_k \sqrt{-1}S_k^{k+r}, A_k^l] = x_k \sqrt{-1}[S_k^{k+r}, A_k^l] = x_k \sqrt{-1} S_{k+r}^l,$$
$$[H, \sqrt{-1}S_{k+r}^l] = -x_k[S_k^{k+r}, S_{k+r}^l] = -x_k A_k^l.$$

よって $A_k^l \in \mathfrak{k}_{e_k}$, $\sqrt{-1}S_{k+r}^l \in \mathfrak{m}_{e_k}$ となり, $e_k \in \Sigma$ が分かった.

また, $2r+1 \leq k \leq n, 2r+1 \leq l \leq n$ に対して, $[H, A_k^l] = 0$ である.

以上より, 次の命題が示された,

命題 7

$$\Sigma = \{\pm e_i \pm e_j \mid 1 \leq i < j \leq r\} \cap \{\pm e_i \mid 1 \leq i \leq r\}.$$
$$m(\pm e_i \pm e_j) = 1, m(\pm e_i) = n - 2r.$$

$1 \leq k \leq r$ に対して,

$$\begin{aligned}
[H, A_k^{k+r}] &= [x_k\sqrt{-1}S_k^{k+r}, A_k^{k+r}] = x_k\sqrt{-1}(S_{k+r}^{k+r} - S_k^k) \\
&= -2x_k\sqrt{-1}(E_k^k - E_{k+r}^{k+r}) = -2x_k\sqrt{-1}D_k^{k+r}, \\
[H, \sqrt{-1}D_k^{k+r}] &= [x_k\sqrt{-1}S_k^{k+r}, \sqrt{-1}D_k^{k+r}] = -x_k[S_k^{k+r}, D_k^{k+r}] \\
&= -x_k(A_{k+r}^k - A_{k+r}^k) = 2x_kA_k^{k+r}.
\end{aligned}$$

よって, $1 \leq k \leq r$ に対して $A_k^{k+r} \in V_{2e_k}^{\perp}(\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{m}_2)$, $\sqrt{-1}D_k^{k+r} \in V_{2e_k}^{\perp}(\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{k}_2)$ となり, $2e_k \in W$ となる. $1 \leq k < l \leq r$ に対して,

$$\begin{aligned}
&[H, A_k^{l+r} + A_{k+r}^l] = [x_k\sqrt{-1}S_k^{k+r} + x_l\sqrt{-1}S_l^{l+r}, A_k^{l+r} + A_{k+r}^l] \\
=&x_k\sqrt{-1}[S_k^{k+r}, A_k^{l+r} + A_{k+r}^l] + x_l\sqrt{-1}[S_l^{l+r}, A_k^{l+r} + A_{k+r}^l] \\
=&x_k\sqrt{-1}(S_{k+r}^{l+r} + S_k^l) + x_l\sqrt{-1}(-S_k^l - S_{k+r}^{l+r}) \\
=&(x_k - x_l)\sqrt{-1}(S_k^l + S_{k+r}^{l+r}), \\
&[H, \sqrt{-1}(S_k^l + S_{k+r}^{l+r})] = [x_k\sqrt{-1}S_k^{k+r} + x_l\sqrt{-1}S_l^{l+r}, \sqrt{-1}(S_k^l + S_{k+r}^{l+r})] \\
=&- x_k[S_k^{k+r}, (S_k^l + S_{k+r}^{l+r})] - x_l[S_k^{k+r}, (S_k^l + S_{k+r}^{l+r})] \\
=&- x_k(A_{k+r}^l + A_k^{l+r}) - x_l(A_{l+r}^k + A_l^{k+r}) \\
=&- (x_k - x_l)(A_k^{l+r} + A_{k+r}^l).
\end{aligned}$$

よって, $1 \leq k < l \leq r$ に対して, $A_k^{l+r} + A_{k+r}^l \in V_{e_k - e_l}^{\perp}(\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{m}_2)$, $\sqrt{-1}(S_k^l + S_{k+r}^{l+r}) \in V_{e_k - e_l}^{\perp}(\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{k}_2)$ となり, $e_k - e_l \in W$ となる. 同様にして,

$$\begin{aligned}
[H, A_k^{l+r} - A_{k+r}^l] &= (x_k + x_l)\sqrt{-1}(S_k^l - S_{k+r}^{l+r}), \\
[H, \sqrt{-1}(S_k^l - S_{k+r}^{l+r})] &= -(x_k + x_l)(A_k^{l+r} - A_{k+r}^l).
\end{aligned}$$

よって, $1 \leq k < l \leq r$ に対して, $A_k^{l+r} - A_{k+r}^l \in V_{e_k + e_l}^{\perp}(\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{m}_2)$, $\sqrt{-1}(S_k^l - S_{k+r}^{l+r}) \in V_{e_k + e_l}^{\perp}(\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{k}_2)$ となり, $e_k + e_l \in W$ となる.

$1 \leq k \leq r$, $2r+1 \leq l \leq n$ に対して,

$$[H, A_k^l] = [x_k\sqrt{-1}S_k^{k+r}, A_k^l] = x_k\sqrt{-1}S_{k+r}^l,$$
$$[H, \sqrt{-1}S_{k+r}^l] = [x_k\sqrt{-1}S_k^{k+r}, \sqrt{-1}S_{k+r}^l] = -x_k A_k^l.$$

よって, $1 \leq k \leq r$, $2r+1 \leq l \leq n$ に対して, $A_k^l \in V_{e_k}^{\perp}(\mathfrak{k}_1 \cap \mathfrak{m}_2)$, $\sqrt{-1}S_{k+r}^l \in V_{e_k}^{\perp}(\mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{k}_2)$ となり, $e_k \in W$ となる.

また, $1 \leq i \leq r$ に対して, $\sqrt{-1}(E_i^i + E_{i+r}^{i+r} - 2E_n^n) \in \mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{k}_2$ であり, $[H, \sqrt{-1}(E_i^i + E_{i+r}^{i+r} - 2E_n^n)] = 0$, $2r+1 \leq i \leq n$ に対して, $[H, \sqrt{-1}E_i^i] = 0$.

以上より, 次の命題がわかった.

命題 8

$W = \{\pm e_i \pm e_j \mid 1 \leq i < j \leq r\} \cap \{\pm e_i \mid 1 \leq i \leq r\} \cap \{\pm 2e_i \mid 1 \leq i \leq r\}$.

$n(\pm e_i), n(\pm e_i \pm e_j) = 1, n(\pm e_i) = n - 2r$.

参考文献

[1] N. Bourbaki, *Groupes et algebres de Lie*, Hermann, Paris, 1975.

[2] O. Goertsches and G. Thorbergsson, *On the Geometry of the orbits of Hermann action*, Geom. Dedicata, **129** (2007), 101–118.

[3] R. Harvey and H. B. Lawson, Jr., *Calibrated geometries*, Acta Math., **148** (1982), 47–157.

[4] O. Ikawa, *The geometry of symmetric triad and orbit spaces of Hermann actions.*, J. Math. Soc. Japan **63** (2011), 79–136.

[5] O. Ikawa, *A note on symmetric triad and Hermann actions*, Proceedings of the workshop on differential geometry of submanifolds and its related topics, Saga, August 4–6, (2012), 220–229.

[6] O. Ikawa, T. Sakai and H. Tasaki, *Weakly reflective submanifolds and austere submanifolds*, J. Math. Soc. Japan, **61** (2009), 437–481.

[7] A. Kollross, *A classification of hyperpolar and cohomogeneity one actions*, Trans. Amer. Math. Soc. **354** (2002), no. 2, 571–612.

[8] Dominic S. P. Leung, *The reflection principle for minimal submanifolds of Riemannian symmetric spaces*, J. Differential Geom., **8** (1973), 153–160.

[9] T. Matsuki, *Double coset decompositions of reductive Lie groups arising from two involutions*, J. Algebra, **197** (1997), 49–91.

[10] S. Ohno, *A sufficient condition for orbits of Hermann action to be weakly reflective*, to appear in Tokyo Journal Mathematics.

[11] J. Tits, *Classification of algebraic semisimple groups*, Algebraic groups and discontinuous subgroups(Proc. Sympos. Pure Math. Boulder, Colo., 1965), Amer. Math. Soc., (1966), 33–62.